



TITLE:

一般化van der Monde行列の行列式について  
(Computer Algebra : Design of Algorithms,  
Implementations and Applications)

AUTHOR(S):

北本, 卓也; 山口, 哲

---

CITATION:

北本, 卓也 ...[et al]. 一般化van der Monde行列の行列式について (Computer Algebra : Design of Algorithms, Implementations and Applications). 数理解析研究所講究録 2009, 1652: 132-133

ISSUE DATE:

2009-06

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140805>

RIGHT:

## 一般化 van der Monde 行列の行列式について

北本卓也

TAKUYA KITAMOTO

山口大・教育学部

YAMAGUCHI UNIVERSITY

山口哲

TETSU YAMAGUCHI

サイバネットシステム

CYBERNET SYSTEMS Co., LTD.

### 1 問題設定

$f_i(x)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を  $x$  の多項式とすると、次の行列を考える。

$$M = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{bmatrix} \quad (1)$$

この行列は  $f_i(x) = x^{i-1}$  とした時に、van der Monde 行列となるので、van der Monde 行列の一般化と考えることが出来る。行列の形より、次の補題を容易に見て取れる。

**補題 1** (1) で行列  $M$  を定義するとき、 $\text{Det}(M)$  は  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の交代式である。

**補題 1** より、 $\text{Det}(M)$  は

$$\text{Det}(M) = g(x_1, \dots, x_n) \prod_{i>j} (x_i - x_j) \quad (2)$$

(ただし、 $g(x_1, \dots, x_n)$  は  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) の対称式) と書くことが出来る。 $g(x_1, \dots, x_n)$  は  $x_1, \dots, x_n$  の対称式なので、基本対称式  $s_1 = x_1 + \dots + x_n, \dots, s_n = x_1 \cdots x_n$  の多項式  $h(s_1, \dots, s_n)$  で

$$h(s_1, \dots, s_n) = g(x_1, \dots, x_n) \quad (3)$$

を満たすものが存在する。(2),(3) より、

$$h(s_1, \dots, s_n) = \frac{\text{Det}(M)}{\prod_{i>j} (x_i - x_j)} \quad (4)$$

を満たす  $h(s_1, \dots, s_n)$  が存在し、また、このような  $h(s_1, \dots, s_n)$  が求まれば、(2) より  $\text{Det}(M)$  も計算できる。よって以下では (4) の  $h(s_1, \dots, s_n)$  を求める。

### 2 $h(s_1, \dots, s_n)$ の計算

$h(s_1, \dots, s_n)$  は  $s_1, \dots, s_n$  の多項式であるが、その係数に関して次の定理が成り立つ。

定理 1  $h(s_1, \dots, s_n)$  を

$$h(s_1, \dots, s_n) = \sum \mu(e_1, \dots, e_n) s_1^{e_1} \dots s_n^{e_n} \quad (5)$$

の形で書き表す時、 $\mu(e_1, \dots, e_n)$  は

$$\mu(e_1, \dots, e_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \Psi(e_1, \dots, e_n)} \alpha_{i_1, \dots, i_n}^{(e_1, \dots, e_n)} \phi(i_1, \dots, i_n) \quad (\alpha_{i_1, \dots, i_n}^{(e_1, \dots, e_n)} \in \mathbf{R}) \quad (6)$$

と書ける。ただし、 $\Psi(e_1, \dots, e_n)$  は

$$\Psi(e_1, \dots, e_n) \stackrel{\text{def}}{=} \{ (j_1, \dots, j_n) \mid j_1, \dots, j_n \in \mathbf{Z}, j_1 + \dots + j_n = \sum_{i=1}^n e_i + \frac{n(n-1)}{2}, 0 \leq j_1 < \dots < j_n, \} \quad (7)$$

で定義される集合であり、 $\phi(i_1, \dots, i_n)$  は

$$\phi(i_1, \dots, i_n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Det} \left( \begin{bmatrix} w_{1,i_1} & w_{2,i_1} & \dots & w_{n,i_1} \\ w_{1,i_2} & w_{2,i_2} & \dots & w_{n,i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1,i_n} & w_{2,i_n} & \dots & w_{n,i_n} \end{bmatrix} \right) \quad (8)$$

で定義される  $w_{l,m}$  ( $l, m \in \mathbf{Z}$ ) の多項式である。

上の定理の  $\alpha_{i_1, \dots, i_n}^{(e_1, \dots, e_n)} (\in \mathbf{R})$  は  $w_{i,j}$  に無関係が定数なので、 $f_i(x)$  が与えられる前に計算しておくことが可能である。よって  $h(s_1, \dots, s_n)$  を計算するための次のアルゴリズムを得る（以下では  $\alpha_{i_1, \dots, i_n}^{(e_1, \dots, e_n)}$  はあらかじめ計算されていると仮定する）。

- (1) 式 (5) の和に現れる可能性のある全ての指数  $(e_1, \dots, e_n)$  に対して以下の操作を行う。
  - (1.1)  $\Psi(e_1, \dots, e_n)$  を (7) より求める。
  - (1.2)  $\Psi(e_1, \dots, e_n)$  の各要素  $(j_1, \dots, j_n)$  に対し、 $\phi(i_1, \dots, i_n)$  を (8) より求める。
  - (1.3)  $\mu(e_1, \dots, e_n)$  を (6) より求める。
- (2)  $h(s_1, \dots, s_n)$  を (5) より求める。

### 3 結論

van der Monde 行列を一般化した行列の行列式アルゴリズムを示した。提案したアルゴリズムは、記号を含む行列の行列式の計算を必要としないため、直接的な方法よりも計算効率が良い。参考文献 [1],[2] では本稿で示した形で一般化された van der Monde 行列が現れ、その行列式が代数的 Riccati 方程式の求解に必要なになっている ([1],[2] では状態フィードバックで実現可能な最適  $H_\infty$ ,  $H_2$  ノルムの計算法が述べられている)。よってこれらの問題の求解に本稿のアルゴリズムは有用である。

### 参 考 文 献

- [1] T. Kitamoto and T. Yamaguchi, "The optimal  $H_\infty$  norm of a parametric system achievable using a static feedback controller," *The IEICE Trans. Funda.*, Vol. E90-A, No. 11, pp. 2496–2509, 2007.
- [2] 北本、山口 "パラメータを含むシステムの LQ 制御問題について," 電子情報通信学会論文誌, 掲載予定.